2025 年度　一般選抜公立大学中期日程　〔データサイエンス学部〕　数学
出題の意図と解答の傾向

$\boxed{1}$（60 点）

数学 I・A・II の幅広い単元から、基本的な知識を身に付け活用することができるかを問う問題を出題した。

【解答】

(1) ア：$1 \pm \sqrt{3}$

(2) イ：$\sqrt{61}$　ウ：$\dfrac{12}{\sqrt{61}}$

(3) エ：1　オ：25

(4) カ：$-\dfrac{4}{9}$　キ：$-\dfrac{5}{4} \leqq y \leqq 1+\sqrt{2}$

【解答の傾向】

各単元における基本的な知識を活用することにより解くことができる。(1) や (4) の前半については、計算ミスと思われる解答もあったが、正答が比較的多かった。(2) では計算ミスと思われる解答が多く、やや複雑な数値に対して正確に計算を実行できるかが問われた。(3) では係数の符号の誤りが散見された。解と係数の関係を正しく理解して活用することが必要であった。(4) の後半は正答が少なかった。解答に至る段階がやや多いが、基本的な知識の組み合わせで解くことができるので、落ち着いて各段階に対処することを心がけたい。

$\boxed{2}$（70 点）

数学 A「場合の数と確率」、数学 B「確率分布と統計的な推測」からの出題である。問題文で与えられた条件を正しく読み取り、適切に整理することができるかを問う出題とした。

【解答】

i 回目（$i=1,2$）に取り出したカードに書かれた数を Z_i とする。Z_1, Z_2 は独立で、$i=1,2$ に対して $P(Z_i=1)=\dfrac{1}{m+3}$, $P(Z_i=2)=\dfrac{2}{m+3}$, $P(Z_i=3)=\dfrac{m}{m+3}$ が成り立つ。

(1) $Y=2$ となるのは、Z_1, Z_2 がいずれも 2 以上であり、かつ $Z_1=Z_2=3$ ではない場合であるから、

$$P(Y=2)=P(Z_1 \geqq 2, Z_2 \geqq 2)-P(Z_1=3, Z_2=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}-\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4}{9}$$

である。

（別解）$Y=2$ となるのは、$(Z_1, Z_2)=(2,2),(2,3),(3,2)$ のいずれかの場合であるから、

$$\begin{aligned}P(Y=2)&=P(Z_1=2, Z_2=2)+P(Z_1=2, Z_2=3)+P(Z_1=3, Z_2=2)\\&=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

である。

(2) $X=1$ となるのは $(Z_1, Z_2)=(1,1)$ の場合なので $P(X=1)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

$X=2$ となるのは $(Z_1, Z_2)=(1,2),(2,1),(2,2)$ のいずれかの場合であるから $P(X=2)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{6}+\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{8}{36}$ である。
X のとりうる値は $1,2,3$ のみであるから $P(X=3)=1-\dfrac{1}{36}-\dfrac{8}{36}=\dfrac{27}{36}$ である。

以上より、求める期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{8}{36}+3\cdot\frac{27}{36}=\frac{49}{18}$$

である。

(3) (2) と同様に、一般の m に対して $P(X=1)=\dfrac{1}{(m+3)^2}$, $P(X=2)=\dfrac{8}{(m+3)^2}$, $P(X=3)=1-\dfrac{9}{(m+3)^2}$ であるから

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{(m+3)^2}+2\cdot\frac{8}{(m+3)^2}+3\cdot\left(1-\frac{9}{(m+3)^2}\right)=3-\frac{10}{(m+3)^2}$$

である。よって求める条件は $3 - \dfrac{10}{(m+3)^2} > 2.99$ となり、これを整理して $(m+3)^2 > 1000$ を得る。$31^2 < 1000 < 32^2$ であるから、これを満たす最小の自然数は $m = 29$ である。

【解答の傾向】

(1), (2) は正答が比較的多かったが、問題の状況を正しく把握できていない解答が一定程度見られた。例えば、1 回目の操作の後にカードを袋に戻すことや、2 回とも同じ数のカードを引いた場合の X, Y の値の決め方は解答にあたって重要な情報であり、読み落とさないように慎重に問題文を読む必要がある。確率の問題では特に、必要に応じて図や表などを用いて正確な状況把握をする練習をしておくとよい。

(3) は期待値の計算までは本質的に (2) と同じであるが、文字定数の扱いに戸惑ったと思われる解答も見られた。必要な知識自体は基本的なものなので、確率や期待値に関する計算に普段から慣れておくことが重要である。

$\boxed{3}$ （70 点）

数学 II「微分法と積分法」からの出題である。前半、関数 $y = f(x)$ を微分、増減表を作り曲線 $y = f(x)$ のグラフを描くところまでは通常の手順と考えられる。後半の積分の計算には一工夫が望まれる。

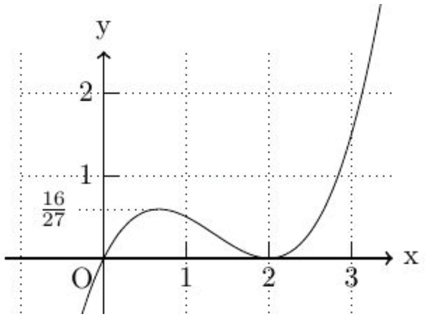
【解答】

(1) $y = \dfrac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x$ を微分して、$y' = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 2$ である。

$y' = \dfrac{1}{2}(3x-2)(x-2) = 0$ のとき $x = \dfrac{2}{3}, 2$ であるから、下記の増減表を得る。

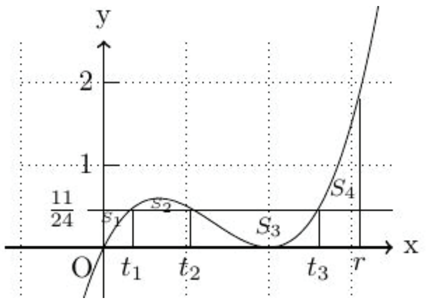
x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{16}{27}$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

グラフは次のようになる。



(2) $f(2)=0,\ f(t_3)=\dfrac{11}{24},\ f(3)=\dfrac{3}{2}$ なので、$f(2)<f(t_3)<f(3)$ が成立する。増減表から $f(x)$ は $x \geqq 2$ では増加関数なので、x の値が大きい方が $f(x)$ の値も大きい。したがって、$2<t_3<3$ が成立する。(これが成立しないとき、例えば $t_3<2$ であれば、$f(2)<f(t_3)$ より $y=f(x)$ が増加関数であることに矛盾する。)

(3) 記号を整理すると次の図になる。



$S_1+S_3=S_2+S_4$ の左辺を右辺に移項し整理すると、

$$\int_0^{t_1}\left(f(x)-\frac{11}{24}\right)dx+\int_{t_1}^{t_2}\left(f(x)-\frac{11}{24}\right)dx$$
$$+\int_{t_2}^{t_3}\left(f(x)-\frac{11}{24}\right)dx+\int_{t_3}^{r}\left(f(x)-\frac{11}{24}\right)dx=0$$

となる。左辺は $\displaystyle\int_0^{r}\left(f(x)-\frac{11}{24}\right)dx$ となり、$\displaystyle\int_0^{r}\left(f(x)-\frac{11}{24}\right)dx=0\ (**)$ を得る。$(**)$ は r が満たす必要条件である。

$$\int_0^r \left(f(x) - \frac{11}{24}\right)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{11}{24}x\right]_0^r$$
$$= \frac{1}{8}r^4 - \frac{2}{3}r^3 + r^2 - \frac{11}{24}r = 0$$

であり、これを整理すると $r(r-1)(3r^2-13r+11)=0$ となるから、これを解いて $r = 0, 1, \dfrac{13 \pm \sqrt{37}}{6}$ を得る。

(2) の $2 < t_3 < 3$ であることを用い、解の特定を行う。

$r = \dfrac{13-\sqrt{37}}{6} < \dfrac{13-6}{6} = \dfrac{7}{6} < 2 < t_3$ より、r は t_3 を超えないので不適。同様に $r = 0, 1$ も t_3 を超えないので不適。

$r = \dfrac{13+\sqrt{37}}{6} > \dfrac{13+6}{6} = \dfrac{19}{6} > 3 > t_3$ より、r は t_3 を超えていて適する。

以上より、$r = \dfrac{13+\sqrt{37}}{6}$ が求める解。

（他の解 $r = 1$ や $r = \dfrac{13-\sqrt{37}}{6}$ が $(**)$ の積分の上端になるとき、囲まれる面積の $y = \dfrac{11}{24}$ より上の部分と下の部分の面積が一致する。）

【解答の傾向】

(1) は 3 次関数の微分、増減表の確認、グラフを描く内容で、ほとんどの解答が正解であった。

(2) は関数 $y = f(x)$ が $x \geqq 2$ で増加関数であることと $f(2) < f(t_3) < f(3)$ から、容易に $2 < t_3 < 3$ を得ることができる。やはり、ほとんどの解答が正解であった。

(3) が本大問の主題である。問題の条件 $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ を一方の辺に移項し、定積分の上端、下端の性質から解答の $(**)$ を得て、r の候補を得る手順が望ましい。この場合、定積分の計算は 1 回で済む。個別に定積分の計算をすると、類似した計算を 4 回行うことになり、同じ $(**)$ を得るが計算は煩雑になる。$(**)$ から r の候補を得て適する r を決める際、(2) を用いる。(2) の結果を利用して適する r を決める部分に言及した解答は少数であった。(2) まで完答し、(3) に手を付けていない解答も多かった。